

Exercice 2

Ex I ① $600 = 2 \times 3 \times (5 \times 2)^2 = 2^3 \times 3^1 \times 5^2$
 d'où $\text{Card}(600) = (3+1) \times (1+1) \times (2+1) = 24$

② $\mathcal{D}_7 = \{-7; -1; 1; 7\}$ dans $\mathbb{Z}$.

$4n-5 \mid 7 \iff 4n-5 \in \mathcal{D}_7$

ou $4n-5 \geq -5$ car $n \geq 0$

donc $\begin{cases} * 4n-5 = -1 \iff n=1 \\ * 4n-5 = 1 \iff n=\frac{3}{2} \notin \mathbb{N} \\ * 4n-5 = 7 \iff n=3 \end{cases}$
 donc $\mathcal{Y} = \{1; 3\}$

③ Soit $m \in \mathbb{N}$

$\begin{cases} m-4 \mid 3m-17 \\ m-4 \mid m-4 \end{cases} \implies m-4 \mid 3(m-4) - (3m-17) \implies m-4 \mid 5$

ou $\mathcal{D}_5 = \{-5; -1; 1; 5\}$

$\forall m \in \mathbb{N} \quad m-4 \geq -4$

d'où trois solutions "potentielles"

* $m-4 = -1 \iff m=3$

* $m-4 = 1 \iff m=5$

* $m-4 = 5 \iff m=9$

On vérifie que $\begin{aligned} 3-4 \mid 3 \times 3 - 17 & \text{ vrai car } -1 \mid -8 \\ 5-4 \mid 3 \times 5 - 17 & \text{ vrai car } 1 \mid -2 \\ 9-4 \mid 3 \times 9 - 17 & \text{ vrai car } 5 \mid 10 \end{aligned}$

d'où $\mathcal{Y} = \{3; 5; 9\}$

④ Soit $(x; y) \in \mathbb{N}^2$

d'où $3x+y \geq 0$

et $(3x-y)(3x+y) = 32 \implies 3x-y > 0$

de plus $3x+y \geq 3x-y$

donc on cherche x et y tels que $3x-y$ et $3x+y$ soient des diviseurs associés de 32.

ou $\mathcal{D}_{32} = \{1; 2; 4; 8; 16; 32\}$

* $\begin{cases} 3x-y=1 \\ 3x+y=32 \end{cases} \implies 6x=33$ pas de solution dans $\mathbb{N}$

* $\begin{cases} 3x-y=2 \\ 3x+y=16 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x=18 \\ 2y=14 \end{cases} \iff x=3 \text{ et } y=7$

* $\begin{cases} 3x-y=4 \\ 3x+y=8 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x=12 \\ 2y=4 \end{cases} \iff x=2 \text{ et } y=2$

Bien $\mathcal{Y} = \{(2; 2); (3; 7)\}$

Ex II ① $-782 = 61 \times (-13) + 11$
 quotient reste car $0 \leq 11 < 61$

② $2^{2024} + 362 = 2^2 \times 2^{2022} + 4 \times 90 + 2$
 $= 4 \left(\underbrace{2^{2022}}_{\text{quotient}} + 90 \right) + \underbrace{2}_{\text{reste car } 0 \leq 2 < 4}$

③ Soit $(x; y) \in \mathbb{N}^2$ tq $\begin{cases} y-x=421 \\ y=8x+22 \end{cases}$ avec $22 < x$
 d'où par substitution $\begin{cases} 7x+22=421 \\ y=8x+22 \end{cases} \iff \begin{cases} x=57 \\ y=478 \end{cases}$

④ Soit $(d, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que :

$$654 = 17d + r \quad \text{avec } 0 \leq r < d$$

on a donc $654 \geq 17d$ car $r \geq 0$

$$654 < 18d \quad \text{car } r < d$$

$$d \text{ où } \frac{654}{18} < d \leq \frac{654}{17}$$

donc $d = 37$ ou 38

x III Soient $(a, b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$

$$a \mid b \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z}, b = aq$$

$$b \mid a \Leftrightarrow \exists q' \in \mathbb{Z}, a = bq'$$

$$d' \text{ où } a = aqq'$$

$$d' \text{ où } qq' = 1 \quad \text{car } a \neq 0$$

$$d' \text{ où } q = q' = 1 \quad \text{ou} \quad q = q' = -1$$

$$\text{Soit } a = b \quad \text{ou} \quad a = -b$$

$$\text{donc } |a| = |b|$$

x IV Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $S_m = m \cdot \frac{m+1}{2}$

* 1^{er} cas: m impair donc $m = 2k+1$ $k \in \mathbb{N}$

$$S_m = m \times \frac{2k+2}{2} = m(\underbrace{k+1}_{\in \mathbb{N}}) + 0$$

donc le reste est 0 dans la div euclid de S_m par m

* 2^{ème} cas: m pair donc $m = 2k$

$$S_m = m \cdot \frac{2k+1}{2} = m \underbrace{\frac{k}{2}}_{\in \mathbb{N}} + \frac{m}{2} \cdot \left(\text{reste } \frac{m}{2} \right) \quad \text{car } 0 \leq \frac{m}{2} < m$$