

Enseignement de spécialité MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées en mode examen.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 4 pages numérotées de 1 à 4.

EXERCICE 1

(4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est juste ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation 1 : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
La suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

Affirmation 2 : On considère la suite (u_n) définie dans l'affirmation 1.
L'instruction `suite(50)` ci-dessous, écrite en langage Python, renvoie u_{50} .

```
1 def suite(k):  
2     S=0  
3     for i in range(k):  
4         S=S+(3/4)**k  
5     return S
```

Affirmation 3 : Soit a un réel et f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = a \ln(x) - 2x$.

Soit C la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Il existe une valeur de a pour laquelle la tangente à C au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

Affirmation 4 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - x} = 0$.

EXERCICE 2**(5,5 points)**

La partie C est indépendante des parties A et B.

Un robot est positionné sur un axe horizontal et se déplace plusieurs fois d'un mètre sur cet axe, aléatoirement vers la droite ou vers la gauche.

Lors du premier déplacement, la probabilité que le robot se déplace à droite est égale à $\frac{1}{3}$.

S'il se déplace à droite, la probabilité que le robot se déplace de nouveau à droite lors du déplacement suivant est égale à $\frac{3}{4}$.

S'il se déplace à gauche, la probabilité que le robot se déplace de nouveau à gauche lors du déplacement suivant est égale à $\frac{1}{2}$.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note :

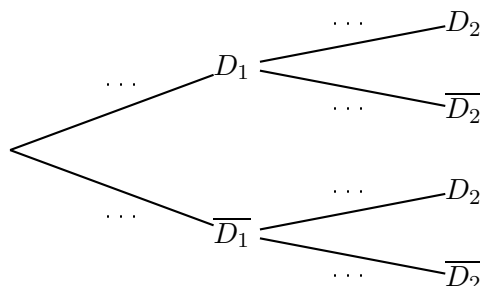
- D_n l'évènement : « le robot se déplace à droite lors du n -ième déplacement »
- $\overline{D_n}$ l'évènement contraire de D_n
- p_n la probabilité de l'évènement D_n

On a donc $p_1 = \frac{1}{3}$.

Partie A : étude du cas particulier où $n = 2$

Dans cette partie, le robot réalise deux déplacements successifs.

1. Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Déterminer la probabilité que le robot se déplace deux fois à droite.
3. Montrer que $p_2 = \frac{7}{12}$.
4. Le robot s'est déplacé à gauche lors du deuxième déplacement. Quelle est la probabilité qu'il se soit déplacé à droite lors du premier déplacement ?

Partie B : étude de la suite (p_n) .

On souhaite estimer le déplacement du robot au bout d'un nombre important d'étapes.

1. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$. On pourra s'aider d'un arbre.
2. a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $p_n \leq p_{n+1} < \frac{2}{3}$.
b. La suite (p_n) est-elle convergente ? Justifier.
3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$, par $u_n = p_n - \frac{2}{3}$.
a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique et préciser son premier terme et sa raison.
b. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

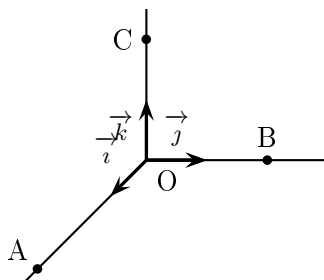
Dans cette partie, on considère un autre robot qui réalise dix déplacements d'un mètre indépendants les uns des autres, chaque déplacement vers la droite ayant une probabilité fixe égale à $\frac{3}{4}$.

Quelle est la probabilité qu'il revienne à son point de départ au bout des dix déplacements ? On arrondira le résultat à 10^{-3} près.

EXERCICE 3**(4,5 points)**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les trois points $A(3; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$ et $C(0; 0; 2)$.



L'objectif de cet exercice est de démontrer la propriété suivante :

« Le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces du tétraèdre OABC »,

Partie 1 : Distance du point O au plan (ABC)

1. Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2; 3; 3)$ est normal au plan (ABC).
2. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x + 3y + 3z - 6 = 0$.
3. Donner une représentation paramétrique de la droite d passant par O et de vecteur directeur $\vec{n}$.
4. On note H le point d'intersection de la droite d et du plan (ABC).
Déterminer les coordonnées du point H.
5. En déduire que la distance du point O au plan (ABC) est égale à $\frac{3\sqrt{22}}{11}$.

Partie 2 : Démonstration de la propriété

1. Démontrer que le volume du tétraèdre OABC est égal à 2.
2. En déduire que l'aire du triangle ABC est égale à $\sqrt{22}$.
3. Démontrer que pour le tétraèdre OABC, « le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces du tétraèdre ».

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3}B \times h$ où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h est la hauteur relative à cette base.

EXERCICE 4**(6 points)**

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f , définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$, par :

$$f(x) = 3x - x \ln(x) - 2 \ln(x).$$

PARTIE A : Étude d'une fonction auxiliaire g

Soit g la fonction définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = 2(x - 1) - x \ln(x)$.

On note g' la fonction dérivée de g . On admet que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = -\infty$.

1. Calculer $g(1)$ et $g(e)$.
2. Déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x)$ en justifiant votre démarche.
3. Montrer que, pour tout $x > 0$, $g'(x) = 1 - \ln(x)$.
En déduire le tableau des variations de g sur $]0 ; +\infty[$.
4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions distinctes sur $]0 ; +\infty[$: 1 et α avec α appartenant à l'intervalle $[e ; +\infty[$.
On donnera un encadrement de α à 0,01 près.
5. En déduire le tableau de signes de g sur $]0 ; +\infty[$.

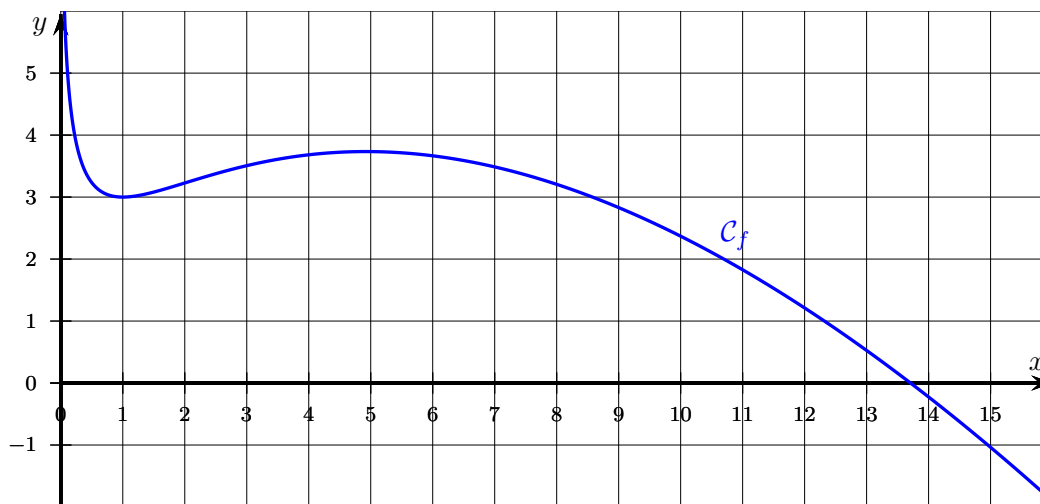
PARTIE B : Étude de la fonction f

On considère la fonction f , définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$, par $f(x) = 3x - x \ln(x) - 2 \ln(x)$.

On note f' la fonction dérivée de f .

La représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de cette fonction f est donnée dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessous.

On admet que : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$.



1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ en justifiant votre démarche.
2. a. Justifier que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.
b. En déduire le tableau des variations de f sur $]0 ; +\infty[$.
3. On admet que, pour tout $x > 0$, la dérivée seconde de f , notée f'' , est définie par $f''(x) = \frac{2-x}{x^2}$.
Étudier la convexité de f et préciser les coordonnées du point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Fin !