

Corrigé DS n° 1

EXERCICE 1

12 pts

1. (a) $z_{B'} = \frac{i}{1-i} = \frac{i(1+i)}{1^2+1^2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

1 pt

(b) $\forall z \neq i, \quad z' = 2 \iff \frac{iz}{z-i} = 2 \iff iz = 2z - 2i \iff (2-i)z = 2i$
 $\iff z = \frac{2i}{2-i}$
 $\iff z = \frac{2i(2+i)}{5}$
 $\iff z = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$

2 pts

(c) $\forall z \neq i, \quad \overline{z'} = \overline{\left(\frac{iz}{z-i}\right)} = \frac{\overline{iz}}{\overline{z-i}} = \frac{-i\overline{z}}{\overline{z}+i}$

1 pt

Soit $z \in i\mathbb{R} \setminus \{i\}$ alors $\overline{z} = -z$

0,5 pt

d'où $\overline{z'} = \frac{iz}{-z+i} = -\frac{iz}{z-i} = -z'$ donc $z' \in i\mathbb{R}$

1 pt

(d) $\forall z \neq i, \quad z' = z \iff \frac{iz}{z-i} = z$
 $\iff iz = z^2 - iz$
 $\iff z^2 - 2iz = 0$
 $\iff z(z-2i) = 0$
 $\iff z = 0 \text{ ou } z = 2i$

Donc les points invariants sont l'origine O du repère et le point d'affixe $2i$.

2 pts

2. Soit $z \neq i$.

(a) $z' = \frac{i(x+iy)}{x+iy-i} = \frac{-y+ix}{x+i(y-1)} = \frac{[-y+ix][x-i(y-1)]}{x^2+(y-1)^2}$
 $= \frac{[-xy+ix(y-1)] + i[x^2+y(y-1)]}{x^2+(y-1)^2}$
 $= \frac{-x}{x^2+(y-1)^2} + i \frac{x^2+y^2-y}{x^2+(y-1)^2}$

D'où $\text{Im}(z') = \frac{x^2+y^2-y}{x^2+(y-1)^2}$

2 pts

(b) Pour $M \neq A, M \in \mathcal{C} \iff z' \in \mathbb{R} \iff \text{Im}(z') = 0$
 $\iff x^2 + y^2 - y = 0$

$\iff x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$
 $\iff (x-0)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$
 $\iff M \in \mathcal{C}_{\Omega, r} \text{ avec } z_{\Omega} = \frac{1}{2}i \text{ et } r = \frac{1}{2}.$

Or le point $A(0; 1)$ appartient à ce cercle car ses coordonnées vérifient l'équation du cercle.

Donc $\mathcal{C}$ est le cercle de centre Ω et de rayon $\frac{1}{2}$, privé de A .

2,5 pts

EXERCICE 2

4 pts

1. $\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{A'G} = \vec{0} \iff z_G - z_A + 2(z_G - z_{A'}) = 0$
 $\iff 3z_G = z_A + 2z_{A'}$
 $\iff 3z_G = z_A + 2\left(\frac{z_B + z_C}{2}\right)$
 $\iff z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$

2 pts

2. $z_{B'} = \frac{z_A + z_C}{2}$
 $\overrightarrow{BG} = z_G - z_B = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} - z_B = \frac{z_A + z_C - 2z_B}{3}$
 $\overrightarrow{BB'} = z_{B'} - z_B = \frac{z_A + z_C}{2} - z_B = \frac{z_A + z_C - 2z_B}{2}$

On a donc : $3\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BB'}$ d'où : $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$

Donc $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BB'}$ sont colinéaires, donc les points B, G et B' sont alignés.

2 pts

EXERCICE 3

6 pts

1. *Proposition 1* : Soit (E) l'équation $z^3 + z^2 + 1 - i = 0$

$$(E) \iff z^3 + z^2 + 1 = i$$

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{R} &\implies z^3 + z^2 + 1 \in \mathbb{R} \\ &\implies z^3 + z^2 + 1 \neq i \end{aligned}$$

Donc aucun réel n'est solution de (E). (Proposition fausse)

2 pts

2. *Proposition 2* : $\forall k \in \mathbb{N}, (1 - i)^{4k+2} \in i\mathbb{R}$

$$(1 - i)^2 = -2i$$

$$\begin{aligned} \text{D'où, pour tout } k \in \mathbb{N} : (1 - i)^{4k+2} &= (1 - i)^2 \times (1 - i)^{4k} \\ &= -2i \times ((1 - i)^4)^k \\ &= -2i \times ((-2i)^2)^k \\ &= -2i \times ((-4))^k \end{aligned}$$

Or, pour tout entier k , $-2 \times ((-4))^k \in \mathbb{R}$

Donc on a bien : $\forall k \in \mathbb{N}, (1 - i)^{4k+2} \in i\mathbb{R}$ (Proposition vraie)

2 pts

3. *Proposition 3* : Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ les points $O(0)$, $M(z)$ et $M'\left(\frac{-1}{\bar{z}}\right)$ sont alignés.

$$\overrightarrow{OM} = z_M = z$$

$$\overrightarrow{OM'} = z'_M = \frac{-1}{\bar{z}} = \frac{-z}{z\bar{z}} = \frac{-1}{z\bar{z}} z$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{OM'} = \frac{-1}{z\bar{z}} \overrightarrow{OM}$$

Or, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\frac{-1}{z\bar{z}} \in \mathbb{R}$

Donc $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont colinéaires, autrement dit les points O , M et M' sont alignés. (Proposition vraie)

2 pts