

Les experts

CORRIGÉ DS n° 2

Ex I

① Soit $m \in \mathbb{Z}$.

$$\left. \begin{array}{l} 3m+1 \mid m+2 \\ 3m+1 \mid 3m+1 \end{array} \right\} \Rightarrow 3m+1 \mid 3(m+2) - (3m+1) \\ \Rightarrow 3m+1 \mid 5$$

$$\text{or } \mathcal{D}_5 = \{-5; -1; 1; 5\} \text{ dans } \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{l} \text{et } \begin{cases} 3m+1 = -5 \Leftrightarrow m = -2 \\ 3m+1 = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{2}{3} \text{ or } -\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z} \\ 3m+1 = 1 \Leftrightarrow m = 0 \\ 3m+1 = 5 \Leftrightarrow m = \frac{4}{3} \text{ or } \frac{4}{3} \notin \mathbb{Z} \end{cases} \end{array}$$

$$\text{d'où } \mathcal{Y} \subset \{-2; 0\}$$

② Vérification

$$\text{si } m = -2 \quad 3m+1 = -5 \text{ et } m+2 = 0 \\ \text{donc } -2 \in \mathcal{Y} \text{ car } -5 \mid 0$$

$$\text{si } m = 0 \quad 3m+1 = 1 \text{ et } m+2 = 2 \\ \text{donc } 0 \in \mathcal{Y} \text{ car } 1 \mid 2$$

③ Bilan: $\mathcal{Y} = \{0; -2\}$

② Soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{4\}$

$$\frac{m+17}{m-4} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m-4 \mid m+17$$

$$\left. \begin{array}{l} m-4 \mid m+17 \\ m-4 \mid m-4 \end{array} \right\} \Rightarrow m-4 \mid 21$$

$$\text{or } \mathcal{D}_{21} = \{-21; -7; -3; -1; 1; 3; 7; 21\} \text{ dans } \mathbb{Z}$$

$$\text{d'où } m \in \{-17; -3; 1; 3; 5; 7; 11; 25\}$$

$$\text{or } m \in \mathbb{N} \text{ d'où } m \in \{1; 3; 5; 7; 11; 25\}$$

③ Vérification: exemple pour $m = 11$ on a bien $11-4 \mid 11+17$

$$\text{d'où } \mathcal{Y} = \{1; 3; 5; 7; 11; 25\}$$

Ex II Soit $P(n)$ la proposition $6 \mid 7^n - 1$

* Initialisation: pour $m=0$ on a $7^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ et on a bien $6 \mid 0$ donc $P(0)$ est vraie

* Hérédité: supposons $P(n)$ vraie pour un entier n donné.

$$\text{Hyp de réc} \rightarrow \exists k \in \mathbb{N} \mid 7^n - 1 = 6k$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } 7^{n+1} - 1 &= 7 \times 7^n - 1 \\ &= 7(6k+1) - 1 \\ &= 6 \times 7k + 7 - 1 \\ &= 6(7k+1) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } 6 \mid 7^{n+1} - 1$$

ainsi $P(n)$ vraie $\Rightarrow P(n+1)$ vraie.

③ On en déduit par récurrence que $\forall m \in \mathbb{N} \quad P(m)$ vraie. Q.f.d.

Ex III Soit $m \in \mathbb{N}$

1^{er} cas: si $m = 3k$ ($k \in \mathbb{N}$)

$$\text{alors } N = 3k(3k-5)(3k+5) \text{ donc } 3 \mid N$$

2^{ème} cas: si $m = 3k+1$ ($k \in \mathbb{N}$)

$$\text{alors } N = (3k+1)(3k-4)(3k+6) = 3(3k+1)(3k-4)(k+2) \text{ donc } 3 \mid N$$

3^{ème} cas: si $m = 3k+2$ ($k \in \mathbb{N}$)

$$\text{alors } N = (3k+2)(3k-3)(3k+7) = 3(3k+2)(k-1)(3k+7) \text{ donc } 3 \mid N$$

Bilan: on peut conclure, par disjonction des cas, que: $\forall m \in \mathbb{N}, 3 \mid N$

Ex 4 On cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que $n^2 - 40 = m^2$ ($m \in \mathbb{N}$)

$$n^2 - 40 = m^2 \Leftrightarrow n^2 - m^2 = 40$$

$$\Leftrightarrow (n-m)(n+m) = 40$$

$$(n, m) \in \mathbb{N}^2 \Rightarrow n+m \geq 0$$

$$\text{et } n-m > 0 \text{ ou } m^2 < n^2$$

$$\text{donc } m < n$$

donc $n^2 - 40 = m^2 \Leftrightarrow n-m$ et $n+m$ sont deux diviseurs associés de 40 dans $\mathbb{N}$

$$\text{or } \mathcal{D}_{40} = \{1; 2; 4; 5; 8; 10; 20; 40\} \text{ avec } n-m < n+m$$

$$\text{d'où } \begin{cases} n-m=1 \\ n+m=40 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} n-m=2 \\ n+m=20 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} n-m=4 \\ n+m=10 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} n-m=5 \\ n+m=8 \end{cases}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} 2n=41 \\ \text{pas de sol dans } \mathbb{N} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} n=11 \\ m=9 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} n=7 \\ m=3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2m=13 \\ \text{pas de solution dans } \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{bilan } n=11 \text{ ou } n=7$$

$$\mathcal{Y} = \{11; 7\}$$

Ex V ① Faux.

$$15 \mid 3 \times 10 \text{ mais } 15 \nmid 3 \\ 15 \nmid 10$$

② Vrai

$$\begin{cases} a \mid a+b \\ a \mid a \end{cases} \Rightarrow a \mid (a+b) - a \\ \Rightarrow a \mid b$$

③ Vrai

$$a \mid b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, b = ka$$

$$\text{d'où } b^2 = k^2 a^2$$

$$\text{or } k^2 \in \mathbb{N} \text{ d'où } a^2 \mid b^2$$

④ Faux

20 est un multiple de 4 et 10

mais 20 n'est pas un multiple de 40