Corrigé DM n° 1

EXERCICE 1

1. On cherche a et b tel que $f(1) = -4$ et $f'(1) = 0$
   - $f(1) = a + b - 3 = -4$
   - f est dérivable sur D en tant que fonction rationnelle définie sur cet intervalle et

     $\forall x \in D, \quad f'(x) = a - 9 \times \dfrac{-1}{(x+2)^2} = a + \dfrac{9}{(x+2)^2}$

     d'où $f'(1) = a + 1$
   - $\begin{cases} f(1) & = & -4 \\ f'(1) & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b-3 & = & -4 \\ a+1 & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a & = & -1 \\ a+b & = & -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a & = & -1 \\ b & = & 0 \end{cases}$
   - bilan : $\forall x \in D, \quad f(x) = -x - \dfrac{9}{x+2}$

2. On étudie le signe de $f(x) - (-x)$ sur D.

   Or, $\forall x \in D$, $f(x) - (-x) = \dfrac{-9}{x+2}$

   Donc $f(x) - (-x)$ est du signe opposé à celui de $x+2$; d'où :

   - La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ sur $]-2; +\infty[$.
   - La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de Δ sur $]-\infty; -2[$.

3. $\forall x \in D$, $f'(x) = a + \dfrac{9}{(x+2)^2} = -1 + \dfrac{9}{(x+2)^2} = \dfrac{-(x+2)^2 + 9}{(x+2)^2}$

   $= \dfrac{(3-(x+2))(3+x+2)}{(x+2)^2} = \dfrac{(1-x)(x+5)}{(x+2)^2}$

   Ainsi $f'(x) = \dfrac{(1-x)(x+5)}{(x+2)^2}$ donc $f'(x)$ est du signe de $(1-x)(x+5)$ sur D.

x	$-\infty$		-5		-2		1		$+\infty$
$(1-x)(x+5)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	8	↗	‖	↗	-4	↘	

4. Equation de la tangente T_0 à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse zéro : $y = f'0)(x-0) + f(0)$

   Or $f'(0) = \dfrac{5}{4}$ et $f(0) = -\dfrac{9}{2}$. Soit : $T_0 : \quad y = \dfrac{5}{4}x - \dfrac{9}{2}$.

5. On cherche x tel que : $f'(x) = 2$.

   Or : $f'(x) = 2 \Leftrightarrow -1 + \dfrac{9}{(x+2)^2} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{9}{(x+2)^2} = 3 \Leftrightarrow (x+2)^2 = \dfrac{9}{3} = 3$

   $\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 & = & \sqrt{3} \\ x+2 & = & -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & -2+\sqrt{3} \\ x & = & -2-\sqrt{3} \end{cases}$

   Bilan : $(\mathscr{C})$ admet deux tangentes de coef. dir. 2 aux points d'abscisses $x_1 = -2 - \sqrt{3}$ et $x_2 = -2 + \sqrt{3}$.

EXERCICE 2

1. $u_n = 5 - n$ majorée par 5 , mais non minorée car $\lim u_n = -\infty$.

2. $u_n = (-2)^n$
3. $u_n = (-2)^n$
4. $u_n = -3 \times (\dfrac{1}{2})^n$

EXERCICE 3

1. D'après le tableau de variations f est croissante puis décroissante, donc :
   - $f'(x) > 0$ sur $]-\infty ; a[$;
   - $f'(x) < 0$ sur $]a ; +\infty[$;
   - $f'(a) = 0$.

2. (a) Seuls les points de $\mathscr{C}_2$ ont des ordonnées positives puis négatives, donc seule $\mathscr{C}_2$ peut être la courbe représentative de f'.
   Donc $\mathscr{C}_1$ est la courbe représentative d'une **primitive** F de f.

   N.B. primitive de f : fonction dont la dérivée est f.

   (b) $f'(a) = 0$ et la courbe $\mathscr{C}_2$ de f'coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse a ; d'après la figure $1 < a < 2$.

   (c) La tangente à la courbe $\mathscr{C}_2$ représentative de F au point d'abscisse a a pour coefficient directeur $F'(a) = f(a) = b$; d'après la figure ce coefficient directeur est supérieur à zéro. Conclusion
   $f(a) = b > 0$.

   Autre explication possible : si b était négatif ou nul, alors d'après le tableau de variation de f on pourrait en déduire que $f(x)$ serait de signe négatif sur $\mathbb{R}$. Donc F serait décroissante sur $\mathbb{R}$ puisque $F' = f$. Ce qui n'est pas le cas...