Corrigé DM n° 2

Exercice 1

1. Déterminons une équation de la droite (AB).
   Soit M$(x\,;\,y)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} \in (\mathrm{AB}) &\iff \overrightarrow{\mathrm{AM}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{AB}} \text{ colinéaires.}\\
&\iff \det\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}};\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = 0\\
&\iff \begin{vmatrix} x - x_A & x_B - x_A \\ y - y_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0\\
&\iff \begin{vmatrix} x+2 & 4 \\ y+2,5 & 6 \end{vmatrix} = 0\\
&\iff 6(x+2) - 4(y+2,5) = 0\\
&\iff 6x - 4y + 2 = 0\\
&\iff 4y = 6x + 2\\
&\iff y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

   La droite (AB) a pour équation : $y = 1,5x + 0,5$.

   La droite (AB) est tangente à la courbe représentative de la fonction h au point d'abscisse 0, donc $h'(0) = 1,5$.

   Or $h'(x) = a \times \mathrm{e}^{-x} + (ax+b) \times (-1)\mathrm{e}^{-x} + 1 = (-ax + a - b)\mathrm{e}^{-x} + 1$

   donc $h'(0) = 1,5 \iff (a-b)\mathrm{e}^0 + 1 = 1,5 \iff a - b = 0,5$

   La droite (AB) coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 0,5 donc $h(0) = 0,5$.

   $h(0) = 0,5 \iff (0+b)\mathrm{e}^0 + 0 = 0,5 \iff b = 0,5$

   Comme $a - b = 0,5$, on en déduit que $a = 1$.

   Donc $h(x) = (x + 0,5)\mathrm{e}^{-x} + x$.

2. $h'(x) = \ldots = \left(\dfrac{1}{2} - x\right)\mathrm{e}^{-x} + 1$.
   $h''(x) = \ldots = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)\mathrm{e}^{-x}$.
   Donc $h''(x)$ est du signe de $\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$.
   h est donc concave sur $]-\infty; 1,5[$ et convexe sur $]1,5; +\infty[$
   Sa courbe admet un point d'inflexion d'abscisse $x = \dfrac{3}{2}$ puisque $h''(x)$ s'annule en changeant de signe en $\dfrac{3}{2}$.

Exercice 2

1. Pour tout réel x appartenant à $[0\,;\,+\infty[$: $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} + x \times (-1)\mathrm{e}^{-x} = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$.
   Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(1-x)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
   On étudie le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

   $f(0) = 0$; $f(1) = \mathrm{e}^{-1}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
   On dresse le tableau de variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

2. Pour étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on étudie le signe de $f''(x)$.
   Pour tout x appartenant à $[0\,;\,+\infty[$: $f''(x) = \ldots = \mathrm{e}^{-x}(x-2)$.

x	0		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
		f est concave		f est convexe	

   On peut même préciser que la courbe admet le point d'abscisse 2 comme point d'inflexion.

3. (a) La tangente T_a a pour équation :

$$\begin{aligned}
y = f'(a)(x-a) + f(a) &\iff y = (1-a)\mathrm{e}^{-a}(x-a) + a\mathrm{e}^{-a}\\
&\iff y = \left[(1-a)\mathrm{e}^{-a}\right]x - (1-a)\mathrm{e}^{-a}a + a\mathrm{e}^{-a}\\
&\iff y = \left[(1-a)\mathrm{e}^{-a}\right]x - a\mathrm{e}^{-a} + a^2\mathrm{e}^{-a} + a\mathrm{e}^{-a}\\
&\iff y = \left[(1-a)\mathrm{e}^{-a}\right]x + a^2\mathrm{e}^{-a}
\end{aligned}$$

   (b) Notons $g(a)$ est l'ordonnée du point H_a de la tangente d'abscisse 0 ; donc $g(a) = \left[(1-a)\mathrm{e}^{-a}\right] \times 0 + a^2\mathrm{e}^{-a} = a^2\mathrm{e}^{-a}$.
   Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$.
   $g'(x) = 2x \times \mathrm{e}^{-x} + x^2 \times (-1)\mathrm{e}^{-x} = -x(x-2)\mathrm{e}^{-x}$

x	0		2		$+\infty$
$-x$	0	$-$		$-$	
$x-2$		$-$	0	$+$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

D'après le tableau de signes de $g'(x)$, la fonction g est croissante puis décroissante ; elle admet un maximum pour $x = 2$, ce qui correspond au point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.