

EXERCICE 1 Thème : fonctions

5,5 points

Partie A

1. • Limite en  $-\infty$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{2}\right) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-x} = -\infty \left. \begin{array}{l} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \end{array} \right\} \text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

- Limite en  $+\infty$

$f(x) = x e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-x} + x$ . On sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$  et que,

par croissance comparée,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} e^{-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2. On admet que  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

- a. Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-x} + x$  donc

$$f'(x) = 1 \times e^{-x} + \left(x + \frac{1}{2}\right) \times (-1) e^{-x} + 1 = \left(-x + \frac{1}{2}\right) e^{-x} + 1, \text{ et donc}$$

$$f''(x) = -1 \times e^{-x} + \left(-x + \frac{1}{2}\right) \times (-1) e^{-x} = \left(x - \frac{3}{2}\right) e^{-x}.$$

- b. Le signe de  $f''$  donne les variations de  $f'$ .

Pour tout  $x$ ,  $e^{-x} > 0$  donc  $f''(x)$  est du signe de  $\left(x - \frac{3}{2}\right)$ .

- Si  $x < \frac{3}{2}$ ,  $f''(x) < 0$  donc  $f'$  est décroissante;
- Si  $x > \frac{3}{2}$ ,  $f''(x) > 0$  donc  $f'$  est croissante;
- Si  $x = \frac{3}{2}$ ,  $f''(x) = 0$  donc  $f'$  admet un minimum égal à

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{3}{2}} + 1 = 1 - e^{-\frac{3}{2}}.$$

- c. La fonction  $f'$  admet pour minimum

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = 1 - e^{-\frac{3}{2}} \approx 0,78 > 0; \text{ donc pour tout } x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0.$$

- d. • La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc continue sur  $\mathbb{R}$ .

- Pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) > 0$  donc la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

- $0 \in ] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [$

Donc, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique dans  $\mathbb{R}$ .

e. On appelle  $\alpha$  la solution de l'équation  $f(x) = 0$ .

$$\left. \begin{array}{l} f(-0,286) \approx -0,001 < 0 \\ f(-0,285) \approx 0,0009 > 0 \end{array} \right\} \text{donc en utilisant comme dans d. le corollaire}$$

du théorème des valeurs intermédiaires  $\alpha \in [-0,286; -0,285]$

Donc  $-0,285$  est une valeur approchée à  $10^{-3}$  de la solution de l'équation  $f(x) = 0$ .

## Partie B

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On admet que  $h''(x) = -\frac{3}{2}e^{-x} + xe^{-x}$ .

$h''(x) \geq 0 \iff -\frac{3}{2}e^{-x} + xe^{-x} \geq 0 \iff \left(x - \frac{3}{2}\right)e^{-x} \geq 0 \iff x - \frac{3}{2} \geq 0 \iff x \geq 1,5$  donc  $h''$  s'annule en changeant du signe uniquement en 1,5 donc 1,5 est l'abscisse de l'unique point d'inflexion de la courbe représentative de  $h$ .

2.  $x_A \neq x_B$  il existe une équation de la droite (AB) de la forme  $y = mx + p$  telle que :  $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ .

$$m = \frac{3,5 + 2,5}{2 + 2} = \frac{6}{4} = 1,5.$$

Par ailleurs,  $A \in (AB)$  donc  $y_A = 1,5x_A + p$  donc  $p = y_A - 1,5x_A = -2,5 + 1,5 \times 2 = 0,5$

La droite (AB) a pour équation :  $y = 1,5x + 0,5$ .

3. La droite (AB) est tangente à la courbe représentative de la fonction  $h$  au point d'abscisse 0, donc  $h'(0) = 1,5$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$

$$h'(x) = a \times e^{-x} + (ax + b) \times (-1)e^{-x} + 1 = (-ax + a - b)e^{-x} + 1$$

$$h'(0) = 1,5 \iff (a - b)e^0 + 1 = 1,5 \iff a - b = 0,5$$

La droite (AB) coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 0,5 donc  $h(0) = 0,5$ .

$$h(0) = 0,5 \iff (0 + b)e^0 + 0 = 0,5 \iff b = 0,5$$

Comme  $a - b = 0,5$ , on en déduit que  $a = 1$ .

Donc  $h(x) = (x + 0,5)e^{-x} + x = f(x)$ .

## EXERCICE 2

5,5 points

1. D'après le texte :

$$\bullet a_1 = a_0 - \frac{15}{100}a_0 + \frac{10}{100}b_0 = 1700 - 255 + 130 = 1575$$

$$\bullet b_1 = b_0 - \frac{10}{100}b_0 + \frac{15}{100}a_0 = 1300 - 130 + 255 = 1425$$

2. Comme on suppose que durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe, on a, pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_n + b_n = 3000$ .

3. Soit  $n \in \mathbb{N}$

$$\text{D'après le texte, on a : } a_{n+1} = a_n - \frac{15}{100}a_n + \frac{10}{100}b_n.$$

Or  $a_n + b_n = 3000$  donc  $b_n = 3000 - a_n$ . On a alors :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n - \frac{15}{100}a_n + \frac{10}{100}(3000 - a_n) = a_n - \frac{15}{100}a_n + \frac{10}{100} \times 3000 - \frac{10}{100}a_n \\ &= a_n - \frac{25}{100}a_n + 300 = \frac{75}{100}a_n + 300 = 0,75a_n + 300 \end{aligned}$$

4. a. On pose, pour tout  $n$  entier naturel, la propriété  $P(n) : 1200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1700$ .

### • Initialisation

$$a_0 = 1700 \text{ et } a_1 = 1575 \text{ donc } 1200 \leq a_1 \leq a_0 \leq 1700$$

Donc  $P(0)$  est vraie.

- **Hérédité** Soit  $n \in \mathbb{N}$

On suppose la propriété vraie au rang  $n$ , soit  $1\,200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1\,700$ ;

$$1\,200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1\,700$$

$$\text{donc } 0,75 \times 1\,200 \leq 0,75 \times a_{n+1} \leq 0,75 \times a_n \leq 0,75 \times 1\,700$$

$$\text{donc } 900 \leq 0,75 \times a_{n+1} \leq 0,75 \times a_n \leq 1\,275$$

$$\text{donc } 900 + 300 \leq 0,75 \times a_{n+1} + 300 \leq 0,75 \times a_n + 300 \leq 1\,275 + 300$$

$$\text{donc } 1\,200 \leq a_{n+2} \leq a_{n+1} \leq 1\,575$$

$$\text{Or } 1\,575 \leq 1\,700 \text{ donc } 1\,200 \leq a_{n+2} \leq a_{n+1} \leq 1\,700.$$

La propriété est donc vraie au rang  $n + 1$  donc elle est héréditaire.

- **Conclusion**

La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout  $n \geq 0$ ; donc d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout  $n \geq 0$ .

On a donc démontré que, pour tout  $n$ ,  $1\,200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1\,700$ .

- b. • Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_{n+1} \leq a_n$  donc la suite  $(a_n)$  est décroissante.  
 • Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1\,200 \leq a_n$  donc la suite  $(a_n)$  est minorée.

La suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et minorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, elle est convergente.

5. a. Soit  $n \in \mathbb{N}$

$$v_n = a_n - 1\,200; \text{ donc } a_n = v_n + 1\,200.$$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= a_{n+1} - 1\,200 = 0,75a_n + 300 - 1\,200 = 0,75(v_n + 1\,200) - 900 \\ &= 0,75v_n + 900 - 900 = 0,75v_n \end{aligned}$$

$$v_0 = a_0 - 1\,200 = 1\,700 - 1\,200 = 500$$

Donc  $(v_n)$  est la suite géométrique de premier terme  $v_0 = 500$  et de raison  $q = 0,75$ .

- b. On en déduit que, pour tout  $n$ , on a :  $v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 0,75^n$ .

- c. On sait que, pour tout  $n$ ,  $a_n = v_n + 1\,200$ , donc  $a_n = 500 \times 0,75^n + 1\,200$ .

6. a.  $-1 < 0,75 < 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,75^n = 0$ ; on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 500 \times 0,75^n = 0$  et donc que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1\,200$ .

- b. On peut donc dire qu'à long terme, le nombre de sportifs dans le club A va tendre vers 1 200, et donc que le nombre de sportifs dans le club B va tendre vers  $3\,000 - 1\,200 = 1\,800$ .

7. a. On complète le programme Python ci-dessous afin qu'il renvoie la plus petite valeur de  $n$  à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à 1 280.

```
def seuil() :
    n = 0
    A = 1 700
    while A >= 1280 :
        n = n + 1
        A = 0.75 * A + 300
    return n
```

- b. La valeur renvoyée lorsqu'on appelle la fonction seuil est la plus petite valeur de  $n$  telle que  $a_n < 1\,280$ .  $a_6 \approx 1\,289$  et  $(a_n)$  est décroissante donc la valeur de  $n$  renvoyée est supérieure ou égale à 7.  $a_7 \approx 1\,267$  donc la valeur de  $n$  renvoyée par la fonction seuil est 7.

### EXERCICE 3

5 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé d'unité 1 cm, on considère les points

$$D(3; 1; 5), \quad E(3; -2; -1), \quad F(-1; 2; 1), \quad G(3; 2; -3)$$

1. a. Le vecteur  $\overrightarrow{EF}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} -1-3 \\ 2-(-2) \\ 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Le vecteur  $\overrightarrow{FG}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} 3-(-1) \\ 2-2 \\ -3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

b.  $-4 \times (-1) = 4$  et  $4 \times (-1) = -4 \neq 0$  donc les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{EF}$  et  $\overrightarrow{FG}$  ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs ne sont pas colinéaires; on en déduit que les points E, F et G ne sont pas alignés.

2. a. La droite (FG) passe par le point F et a pour vecteur directeur  $\overrightarrow{FG}$ ; elle a donc pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_F + 4t \\ y = y_F + 0t \\ z = z_F + (-4)t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 2 \\ z = 1 - 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

b. On appelle H le point de coordonnées  $(2; 2; -2)$ .

H est le projeté orthogonal de E sur la droite (FG) si H appartient à la droite (FG) et si les vecteurs  $\overrightarrow{EH}$  et  $\overrightarrow{FG}$  sont orthogonaux.

• Le point H appartient à la droite (FG) si on peut trouver une valeur de  $t$  telle que : 
$$\begin{cases} x_H = -1 + 4t \\ y_H = 2 \\ z_H = 1 - 4t \end{cases}$$

c'est-à-dire  $\begin{cases} 2 = -1 + 4t \\ 2 = 2 \\ -2 = 1 - 4t \end{cases}$

La valeur  $t = \frac{3}{4}$  convient donc le point H appartient à la droite (FG).

• Le vecteur  $\overrightarrow{EH}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} 2-3 \\ 2-(-2) \\ -2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{FG}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{FG} = (-1) \times 4 + 4 \times 0 + (-1) \times (-4) = 0 \text{ donc } \overrightarrow{EH} \perp \overrightarrow{FG}$$

Le point H est donc le projeté orthogonal du point E sur la droite (FG).

c. D'après les questions précédentes, [EH] est la hauteur du triangle EFG correspondant à la base [FG]; donc l'aire du triangle EFG vaut, en  $\text{cm}^2$  :

$$\mathcal{A} = \frac{EH \times FG}{2}.$$

•  $\overrightarrow{EH} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$  donc  $EH = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

•  $\overrightarrow{FG} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$  donc  $FG = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

Donc l'aire du triangle est en  $\text{cm}^2$  :  $\mathcal{A} = \frac{3\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}}{2} = 12.$

3. a. Soit le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

•  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{EF} = 2 \times (-4) + 1 \times 4 + 2 \times 2 = 0$  donc  $\vec{n} \perp \overrightarrow{EF}$

•  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{FG} = 2 \times 4 + 1 \times 0 + 2 \times (-4) = 0$  donc  $\vec{n} \perp \overrightarrow{FG}$



Comme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5$ , on a donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 5 = 0^-$  et donc  
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x) - 5} = -\infty$  et enfin  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{f(x) - 5} = -\infty$ .

**Affirmation 1 fausse**

**Affirmation 2 :** « Pour tout nombre réel  $x$  appartenant à  $] -\infty ; 2[$ , on a  $g(x) \leq x$ . »

$$g(x) \leq x \iff x e^{-x} \leq x \iff x \leq x e^x \iff 0 \leq x e^x - x \iff x(e^x - 1) \geq 0$$

$$e^x - 1 \geq 0 \iff e^x \geq 1 \iff e^x \geq e^0 \iff x \geq 0$$

On établit un tableau de signes :

|              |           |     |     |
|--------------|-----------|-----|-----|
| $x$          | $-\infty$ | $0$ | $2$ |
| $x$          | -         | 0   | +   |
| $e^x - 1$    | -         | 0   | +   |
| $x(e^x - 1)$ | +         | 0   | +   |

Donc, pour tout  $x$  de  $] -\infty ; 2[$ , on a  $x(e^x - 1) \geq 0$  donc  $g(x) \leq x$ .

**Affirmation 2 vraie**

**Affirmation 3 :** la suite  $(S_n)$  converge vers  $\frac{5}{4}$ .

On a la somme des  $n$  premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison  $\frac{1}{5}$ .

$$\text{On a donc } \forall n \in \mathbb{N}, S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4} \times \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} = \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$\left(\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$  est une suite géométrique de la forme  $(q^n)$  avec  $-1 < q < 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$

$$\text{Par produit } \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$$

donc, par somme puis par produit,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{5}{4} = 1,25$ .

**Affirmation 3 vraie**

On considère la suite  $(w_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = \frac{w_n}{1 + w_n} \end{cases}$

On admet que pour tout entier naturel  $n$ ,  $w_n > 0$  et on considère la suite  $(t_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $t_n = \frac{k}{w_n}$  où  $k$  est un nombre réel strictement positif.

**Affirmation 4 :** La suite  $(t_n)$  est une suite arithmétique strictement croissante.

$$\text{Pour tout } n, \text{ on a : } t_{n+1} = \frac{k}{w_{n+1}} = \frac{k}{\frac{w_n}{1+w_n}} = \frac{k(1+w_n)}{w_n} = \frac{k + k w_n}{w_n} = \frac{k}{w_n} + k = t_n + k$$

Donc la suite  $(t_n)$  est arithmétique de raison  $k$ .

De plus,  $k > 0$  donc la suite  $(t_n)$  est strictement croissante.

**Affirmation 4 vraie**