BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : **4 heures**

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Il comporte 5 pages.
L'usage de la calculatrice avec mode examen actif ou de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 **5,5 points**

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x} + x.$$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$f''(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)\mathrm{e}^{-x}.$$
   b. En déduire les variations et le minimum de la fonction f' sur $\mathbb{R}$.
   c. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.
   d. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
   e. Donner une valeur arrondie à 10^{-3} de cette solution.

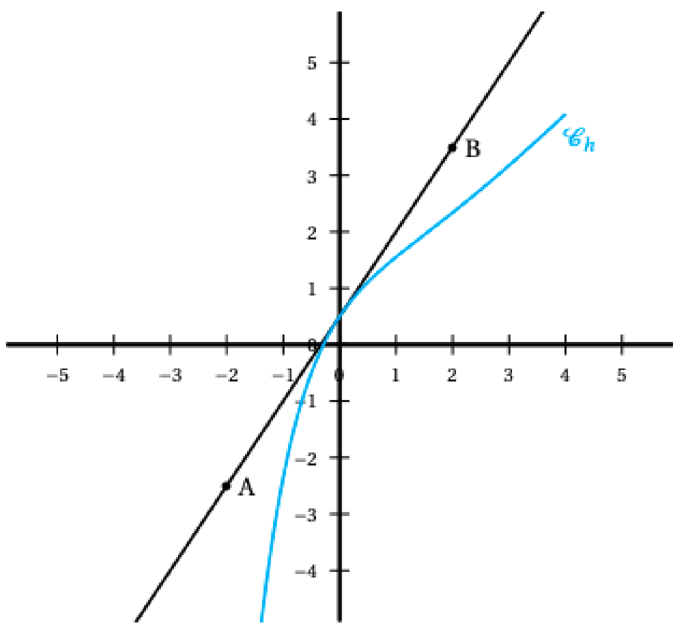
Partie B

On considère une fonction h, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, ayant une expression de la forme

$$h(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{-x} + x, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels.}$$

Dans un repère orthonormé ci-après figurent :

- la courbe représentative $\mathscr{C}_h$ de la fonction h ;
- les points A et B de coordonnées respectives $(-2\,;\,-2,5)$ et $(2\,;\,3,5)$.



1. Sachant que la fonction h admet sur $\mathbb{R}$ une dérivée seconde d'expression

$$h''(x) = -\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x}.$$

déterminer les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction h.

2. Déterminer une équation de la droite (AB).

3. Sachant que la droite (AB) est tangente à la courbe représentative de la fonction h au point d'abscisse 0, en déduire les valeurs de a et b.

Toute initiative correcte sera prise en compte.

Exercice 2 — 5,5 points

On étudie un groupe de 3000 sportifs qui pratiquent soit l'athlétisme dans le club A, soit le basket-ball dans le club B.
En 2023, le club A compte 1700 membres et le club B en compte 1300.

On décide de modéliser le nombre de membres du club A et du club B respectivement par deux suites (a_n) et (b_n), où n désigne le rang de l'année à partir de 2023.
L'année 2023 correspond au rang 0. On a alors $a_0 = 1700$ et $b_0 = 1300$.
Pour notre étude, on fait les hypothèses suivantes :

- durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe ;
- chaque année, 15 % des sportifs du club A quittent ce club et adhèrent au club B ;
- chaque année, 10 % des sportifs du club B quittent ce club et adhèrent au club A.

1. Calculer les nombres de membres de chaque club en 2024.

2. Pour tout entier naturel n, déterminer une relation liant a_n et b_n.

3. Montrer que, pour tout entier naturel n, la suite (a_n) vérifie la relation suivante :

$$a_{n+1} = 0,75a_n + 300.$$

4. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$$1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1700.$$

b. En déduire que la suite (a_n) converge.

5. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = a_n - 1200$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

b. Exprimer v_n en fonction de n.

c. En déduire que pour tout entier naturel n, $a_n = 500 \times 0,75^n + 1200$.

6. **a.** Déterminer la limite de la suite (a_n).

b. Interpréter le résultat de la question précédente dans le contexte de l'exercice.

7. **a.** Recopier et compléter le programme Python ci-dessous afin qu'il renvoie la plus petite valeur de n à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à 1280.

```
def seuil():
    n=0
    A=1700
    while .....:
        n=n+1
        A= .....
    return .....
```

b. Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on appelle la fonction seuil.

Exercice 3 **5 points**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé d'unité 1 cm, on considère les points

$$D(3\,;\,1\,;\,5),\qquad E(3\,;\,-2\,;\,-1),\qquad F(-1\,;\,2\,;\,1),\qquad G(3\,;\,2\,;\,-3).$$

1. **a.** Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$.

b. Justifier que les points E, F et G ne sont pas alignés.

2. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FG).

b. On appelle H le point de coordonnées $(2\,;\,2\,;\,-2)$.
Vérifier que H est le projeté orthogonal de E sur la droite (FG) .

c. Montrer que l'aire du triangle EFG est égale à 12 cm^2.

3. **a.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (EFG).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (EFG) .

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point D et orthogonale au plan (EFG) .

d. On note K le projeté orthogonal du point D sur le plan (EFG).
À l'aide des questions précédentes, calculer les coordonnées du point K.

4. **a.** Vérifier que la distance DK est égale à 5 cm.

b. En déduire le volume du tétraèdre DEFG.

Exercice 4 **4 points**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\ \{-2\}$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f	5	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

Affirmation 1 :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2}{f(x)-5} = +\infty.$$

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

Affirmation 2 :

Pour tout nombre réel x appartenant à $]-\infty\,;\,2[$, on a $g(x) \leqslant x$.

3. Soit (S_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$S_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{5^n}.$$

Affirmation 3 : la suite (S_n) converge vers $\dfrac{5}{4}$.

4. On considère la suite (w_n) définie par :

$$w_0 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n \geqslant 1,\ w_{n+1} = \frac{w_n}{1+w_n}.$$

On admet que pour tout entier naturel n, $\quad w_n > 0$.

On considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par $t_n = \dfrac{k}{w_n}$ où k est un nombre réel strictement positif.

Affirmation 4 : La suite (t_n) est une suite arithmétique strictement croissante.