EXERCICE 1 **3 pts**

Soit la fonction rationnelle f définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = ax + b - \dfrac{9}{x+2}$ où a et b sont des réels.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Sachant que la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point A de coordonnées $(1; -4)$, montrer que $a = -1$ et $b = 0$.
2. Montrer que : $\forall x \in D,\ f'(x) = \dfrac{5 - 4x - x^2}{(x+2)^2}$.
3. En déduire le tableau de variation de f sur son ensemble de définition D.

EXERCICE 2 **3 pts**

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par : $u_n = \dfrac{5n-2}{n+2}$

1. Démontrer que, pour tout entier n, on a : $-1 \leqslant u_n < 5$
2. Déterminer le sens de variation de cette suite.

EXERCICE 3 **3 pts**

Etudier la limite de chacune des suites suivantes, définies pour tout entier n :

$$u_n = \frac{2n + \sqrt{n}}{1 - 3\sqrt{n}} \qquad v_n = (-1)^n - 2025n \qquad w_n = \frac{3^n - 4^n}{\mathrm{e}^n + 1}$$

EXERCICE 4 **4 pts**

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par : $\begin{cases} u_0 &= 5 \\ u_{n+1} &= \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{4}{3} \end{cases}$

1. Montrer par le calcul que (u_n) n'est pas géométrique.
2. On introduit la suite (v_n) définie pour tout entier n par : $v_n = u_n - 2$

   a. Montrer que la suite v est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$.

   b. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

   c. Préciser la limite de u_n.

   d. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{20} v_k$ et en déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{20} u_k$

Tournez svp !

EXERCICE 5 **4 pts**

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}.$$

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n, par : $v_n = u_n - 3$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.
3. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$.

   b. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

EXERCICE 6 **2 pts**

On considère la suite (t_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $t_0 = 0$ et, pour tout entier n, $t_{n+1} = t_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

Montrer que $t_n = \dfrac{n}{n+1}$ pour tout entier n.

EXERCICE 7 **2 pts**

1. Donner la définition d'une suite divergente vers $+\infty$.
2. Démontrer que toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.