

1. pour montrer qu'une suite est **minorée, majorée, bornée**

$$(a) \begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= 1 + \frac{1}{1+u_n} \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \quad \rightarrow \text{Montrer que : } \forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n \leq 2$$

Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $1 \leq u_n \leq 2$

• *Initialisation* : on a bien $1 \leq 2 \leq 2$, soit $1 \leq u_0 \leq 2$.

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• *Hérédité* : on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier n donné.

$$\begin{aligned} \text{Hyp. de récurrence :} & \quad 1 \leq u_n \leq 2. \\ \text{d'où} & \quad 2 \leq 1 + u_n \leq 3 \\ \text{d'où} & \quad \frac{1}{2} \geq \frac{1}{1+u_n} \geq \frac{1}{3} \quad \text{car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ décroissante sur }]0; +\infty[\\ \text{d'où} & \quad 1 + \frac{1}{3} \leq 1 + \frac{1}{1+u_n} \leq 1 + \frac{1}{2} \\ \text{d'où} & \quad \frac{4}{3} \leq 1 + \frac{1}{1+u_n} \leq \frac{3}{2} \\ \text{d'où} & \quad 1 \leq \frac{4}{3} \leq 1 + \frac{1}{1+u_n} \leq \frac{3}{2} \leq 2 \end{aligned}$$

On a ainsi montré que : $\mathcal{P}(n)$ vraie $\implies \mathcal{P}(n+1)$ vraie

• *Bilan* : on peut donc conclure, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier naturel n , on a : $1 \leq u_n \leq 2$.

$$(b) \begin{cases} x_0 &= -1 \\ x_{n+1} &= \sqrt{3x_n + 4} \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \quad \rightarrow \text{Montrer que : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq x_n \leq 4$$

Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $0 \leq x_n \leq 4$

• *Initialisation* : $x_1 = \sqrt{1} = 1$

et on a bien $0 \leq 1 \leq 4$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

• *Hérédité* : on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier n non nul donné.

$$\begin{aligned} \text{Hyp. de récurrence :} & \quad 0 \leq x_n \leq 4. \\ \text{d'où} & \quad 0 \leq 3x_n \leq 12 \\ \text{d'où} & \quad 4 \leq 3x_n + 4 \leq 16 \\ \text{d'où} & \quad \sqrt{4} \leq \sqrt{3x_n + 4} \leq \sqrt{16} \quad \text{car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ croissante sur } [0; +\infty[\\ \text{d'où} & \quad 0 \leq x_{n+1} \leq 4 \end{aligned}$$

On a ainsi montré que : $\mathcal{P}(n)$ vraie $\implies \mathcal{P}(n+1)$ vraie

- *Bilan* : on peut donc conclure, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier naturel n non nul, on a : $0 \leq x_n \leq 4$.

$$(c) \begin{cases} t_0 &= -8 \\ t_{n+1} &= -\frac{1}{2}t_n^2 + 4 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases} \rightarrow \text{Montrer que : } \forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n \leq -4$$

Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $t_n \leq -4$

- *Initialisation* : on a bien $-8 \leq -4$, soit $t_0 \leq -4$.
Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- *Hérédité* : on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier n donné.

$$\begin{aligned} \text{Hyp. de récurrence :} & \quad t_n \leq -4. \\ \text{d'où} & \quad t_n^2 \geq 16 \quad \text{car } x \mapsto x^2 \text{ décroissante sur }]-\infty; 0[\\ \text{d'où} & \quad -\frac{1}{2}t_n^2 \leq -8 \\ \text{d'où} & \quad -\frac{1}{2}t_n^2 + 4 \leq -4 \\ \text{d'où} & \quad t_{n+1} \leq -4 \end{aligned}$$

On a ainsi montré que : $\mathcal{P}(n)$ vraie $\implies \mathcal{P}(n+1)$ vraie

- *Bilan* : on peut donc conclure, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier naturel n , on a : $t_n \leq -4$.

$$(d) \begin{cases} v_0 &= 1 \\ v_{n+1} &= v_n e^{-v_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases} \rightarrow \text{Montrer que : } \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \in [0; 1]$$

Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $0 \leq v_n \leq 1$

- *Initialisation* : on a bien $0 \leq 1 \leq 1$, soit $0 \leq v_0 \leq 1$.
Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- *Hérédité* : on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier n donné.

$$\begin{aligned} \text{Hyp. de récurrence :} & \quad 0 \leq v_n \leq 1 \\ \text{d'où} & \quad -1 \leq -v_n \leq 0 \\ \text{d'où} & \quad e^{-1} \leq e^{-v_n} \leq e^0 \quad \text{car } \exp \text{ croissante sur } \mathbb{R} \\ \text{soit} & \quad \frac{1}{e} \leq e^{-v_n} \leq 1 \\ \text{d'où} & \quad \frac{1}{e}v_n \leq v_n e^{-v_n} \leq v_n \quad \text{car } v_n \text{ positif (par hyp. de récurrence)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad & 0 \leq \frac{1}{e} v_n \leq v_n e^{-v_n} \leq v_n \leq 1 \\ \text{d'où} \quad & 0 \leq v_{n+1} \leq 1 \end{aligned}$$

On a ainsi montré que : $\mathcal{P}(n)$ vraie $\implies \mathcal{P}(n+1)$ vraie

- *Bilan* : on peut donc conclure, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq v_n \leq 1$.

$$(e) \quad \left\{ \begin{array}{l} w_0 = 4 \\ w_{n+1} = \frac{3w_n + 2}{w_n + 2} \end{array} \right. \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \quad \rightarrow \text{Montrer que : } \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n \geq 2$$

- *Preliminaire* : étudions les variations de la fonction f définie sur $I =]-2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x+2}{x+2}$
 f est dérivable sur I en tant que fonction rationnelle définie sur I .

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \dots = \frac{4}{(x+2)^2}$$

$f'(x) > 0$ sur I , donc f est strict. **croissante** sur I .

Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $w_n \geq 2$

- *Initialisation* : on a bien $4 \geq 2$, soit $w_0 \geq 2$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité* : on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier n donné.

$$\begin{aligned} \text{Hyp. de récurrence :} \quad & w_n \geq 2 \\ \text{d'où} \quad & f(w_n) \geq f(2) \quad \text{car } f \text{ croissante sur } I \text{ donc sur } [2; +\infty[. \\ \text{d'où} \quad & w_{n+1} \geq \frac{8}{4} \\ \text{soit} \quad & w_{n+1} \geq 2 \end{aligned}$$

On a ainsi montré que : $\mathcal{P}(n)$ vraie $\implies \mathcal{P}(n+1)$ vraie

- *Bilan* : on peut donc conclure, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier naturel n , on a : $w_n \geq 2$.

2. pour établir le **sens de variation** d'une suite

$$(a) \begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= \sqrt{4 + u_n^2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases} \rightarrow \text{Montrer que } (u_n) \text{ est strict. croissante.}$$

Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $u_{n+1} > u_n \geq 0$ (on va avoir besoin signe positif)

• *Initialisation* : on a $u_1 = 2$, et on a bien $2 \geq 1 \geq 0$, soit $u_1 > u_0 \geq 0$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• *Hérédité* : on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier n donné.

Hyp. de récurrence :

$$\begin{aligned} & u_{n+1} > u_n \geq 0 \\ \text{d'où} & u_{n+1}^2 > u_n^2 \geq 0 \quad \text{car } x \mapsto x^2 \text{ strict. croissante sur } [0; +\infty[\\ \text{d'où} & 4 + u_{n+1}^2 > 4 + u_n^2 \geq 4 \\ \text{d'où} & \sqrt{4 + u_{n+1}^2} > \sqrt{4 + u_n^2} \geq 2 \quad \text{car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ strict. croissante sur } [0; +\infty[\\ \text{d'où} & u_{n+2} > u_{n+1} \geq 0 \end{aligned}$$

On a ainsi montré que : $\mathcal{P}(n) \text{ vraie} \implies \mathcal{P}(n+1) \text{ vraie}$

• *Bilan* : on peut donc conclure, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} > u_n$, c'est à dire (u_n) croissante .

$$(b) \begin{cases} v_0 &= 0,9 \\ v_{n+1} &= v_n - 0,1 v_n^2 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases} \rightarrow \text{Montrer que : } \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 1$$

• *Preliminaire* : étudions les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 0,1x^2$
 f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme. Et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 - 0,2x$
 $f'(x) > 0 \iff x < 5$, donc f est strict. **croissante** sur $I = [0; 1]$.

Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $0 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 1$

• *Initialisation* : on a $v_1 = 0,9 - 0,1 \times 0,9^2 = 0,819$
Donc on a bien $0 \leq v_1 \leq v_0 \leq 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• *Hérédité* : on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier n donné.

Hyp. de récurrence :

$$\begin{aligned} & 0 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 1 \\ \text{d'où} & f(0) \leq f(v_{n+1}) \leq f(v_n) \leq f(1) \quad \text{car } f \text{ croissante sur } I \\ \text{d'où} & 0 \leq v_{n+2} \leq v_{n+1} \leq 0,9 \\ \text{d'où} & 0 \leq v_{n+2} \leq v_{n+1} \leq 1 \end{aligned}$$

On a ainsi montré que : $\mathcal{P}(n) \text{ vraie} \implies \mathcal{P}(n+1) \text{ vraie}$

• *Bilan* : on peut donc conclure, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 1$.

3. pour établir une **inégalité**

$$(a) \begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \quad \rightarrow \text{Montrer que : } \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq n + 3$$

Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $u_n \leq n + 3$

- *Initialisation* : on a bien $2 \leq 0 + 3$, soit $u_0 \leq 0 + 3$.

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- *Hérédité* : on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier n donné.

$$\begin{aligned} \text{Hyp. de récurrence :} & \quad u_n \leq n + 3. \\ \text{d'où} & \quad \frac{2}{3}u_n \leq \frac{2}{3}(n + 3) \\ \text{d'où} & \quad \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \leq \frac{2}{3}(n + 3) + \frac{1}{3}n + 1 \\ \text{d'où} & \quad u_{n+1} \leq \frac{2}{3}n + 2 + \frac{1}{3}n + 1 \\ \text{soit} & \quad u_{n+1} \leq n + 3 \\ \text{d'où} & \quad u_{n+1} \leq n + 4 \quad (\text{car } n + 3 \leq n + 4) \end{aligned}$$

On a ainsi montré que : $\mathcal{P}(n)$ vraie $\implies \mathcal{P}(n + 1)$ vraie

- *Bilan* : on peut donc conclure, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier naturel n , on a : $u_n \leq n + 3$.

$$(b) \rightarrow \text{Montrer que : } \forall n \geq 2, 5^n \geq 4^n + 3^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $5^n \geq 4^n + 3^n$

- *Initialisation* : on a bien $5^2 \geq 4^2 + 3^2$, donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

- *Hérédité* : on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier n donné.

$$\begin{aligned} \text{Hyp. de récurrence :} & \quad 5^n \geq 4^n + 3^n \\ \text{d'où} & \quad 5 \times 5^n \geq 5 \times (4^n + 3^n) \\ \text{d'où} & \quad 5^{n+1} \geq 5 \times 4^n + 5 \times 3^n \\ \text{d'où} & \quad 5^{n+1} \geq 4^{n+1} + 3^{n+1} \quad (\text{car } 5 \times 4^n \geq 4^{n+1} \text{ et } 5 \times 3^n \geq 3^{n+1}) \end{aligned}$$

On a ainsi montré que : $\mathcal{P}(n)$ vraie $\implies \mathcal{P}(n + 1)$ vraie

- *Bilan* : on peut donc conclure, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a : $5^n \geq 4^n + 3^n$.

- (c) → Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx$
 Soit un réel x positif.

Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $(1+x)^n \geq 1+nx$

• *Initialisation* : on a $(1+x)^0 = 1$, donc on a bien $(1+x)^0 \leq 1+0 \times x$.
 Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• *Hérédité* : on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier n donné.

Hyp. de récurrence : $(1+x)^n \geq 1+nx$.
 d'où $(1+x) \times (1+x)^n \geq (1+x)(1+nx)$ (car $1+x \geq 0$)
 soit $(1+x)^{n+1} \geq 1+nx+x+nx^2$
 soit $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+nx^2$
 d'où $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$ (car $nx^2 \geq 0$)
 d'où $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

On a ainsi montré que : $\mathcal{P}(n)$ vraie $\implies \mathcal{P}(n+1)$ vraie

• *Bilan* : on peut donc conclure, d'après le principe de récurrence, que pour tout réel x positif, et pour tout entier naturel n , on a : $(1+x)^n \geq 1+nx$.

- (d) → Montrer que : $\forall n \geq 6, 6n+7 \leq 2^n$ ($n \in \mathbb{N}$)

Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $6n+7 \leq 2^n$

• *Initialisation* : on a $6 \times 6 + 7 = 43$, et $2^6 = 64$
 Donc on a bien $6 \times 6 + 7 \leq 2^6$, donc $\mathcal{P}(6)$ est vraie.

• *Hérédité* : on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 6$ donné.

Hyp. de récurrence : $6n+7 \leq 2^n$
 d'où $2 \times (6n+7) \leq 2 \times 2^n$
 d'où $12n+14 \leq 2^{n+1}$
 soit $6n+6n+13+1 \leq 2^{n+1}$
 soit $6n+6(n+1)+7+1 \leq 2^{n+1}$
 d'où $6(n+1)+7 \leq 2^{n+1}$

On a ainsi montré que : $\mathcal{P}(n)$ vraie $\implies \mathcal{P}(n+1)$ vraie

• *Bilan* : on peut donc conclure, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier naturel $n \geq 6$, on a : $6n+7 \leq 2^n$.

4. pour établir la **formule explicite** d'une suite

$$(a) \begin{cases} u_0 &= 5000 \\ u_{n+1} &= 1,04u_n + 1000 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

→ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 30000 \times 1,04^n - 25000$

Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $u_n = 30000 \times 1,04^n - 25000$

- *Initialisation* : on a bien $30000 \times 1,04^0 - 25000 = 30000 - 25000 = u_0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité* : on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier n donné.

$$\begin{array}{ll} \text{Hyp. de récurrence :} & u_n = 30000 \times 1,04^n - 25000. \\ \text{d'où} & 1,04u_n + 1000 = 1,04(30000 \times 1,04^n - 25000) + 1000 \\ \text{d'où} & u_{n+1} = 30000 \times 1,04^{n+1} - 1,04 \times 25000 + 1000 \\ \text{soit} & u_{n+1} = 30000 \times 1,04^{n+1} - 26000 + 1000 \\ \text{soit} & u_{n+1} = 30000 \times 1,04^{n+1} - 25000 \end{array}$$

On a ainsi montré que : $\mathcal{P}(n)$ vraie $\implies \mathcal{P}(n+1)$ vraie

- *Bilan* : on peut donc conclure, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier naturel n , on a : $u_n = 30000 \times 1,04^n - 25000$.

$$(b) \begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= \frac{u_n}{1+u_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases} \rightarrow \text{Montrer que : } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2}{2n+1}$$

Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $u_n = \frac{2}{2n+1}$

- *Initialisation* : on a bien $\frac{2}{2 \times 0 + 1} = 2 = u_0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité* : on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier n donné.

$$\begin{array}{ll} \text{Hyp. de récurrence :} & u_n = \frac{2}{2n+1}. \\ \text{d'où} & u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} = \frac{\frac{2}{2n+1}}{1+\frac{2}{2n+1}} = \frac{\frac{2}{2n+1}}{\frac{2n+1+2}{2n+1}} = \frac{2}{2n+3} = \frac{2}{2(n+1)+1} \end{array}$$

On a ainsi montré que : $\mathcal{P}(n)$ vraie $\implies \mathcal{P}(n+1)$ vraie

- *Bilan* : on peut donc conclure, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \frac{2}{2n+1}$.

$$(c) \begin{cases} u_1 &= 0 \\ u_{n+1} &= \sqrt{u_n^2 + 1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

→ Conjecturer la formule explicite de u_n , puis la justifier.

- *Conjecture* : il semble que, pour tout n non nul, on ait : $u_n = \sqrt{n-1}$

Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $u_n = \sqrt{n-1}$

- *Initialisation* : on a bien $\sqrt{1-1} = 0 = u_1$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- *Hérédité* : on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier n non nul donné.

Hyp. de récurrence : $u_n = \sqrt{n-1}$.

$$\text{d'où } u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1} = \sqrt{\sqrt{n-1}^2 + 1} = \sqrt{n-1+1} = \sqrt{n}$$

On a ainsi montré que : $\mathcal{P}(n)$ vraie $\implies \mathcal{P}(n+1)$ vraie

- *Bilan* : on peut donc conclure, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_n = \sqrt{n-1}$.

(d) Approfondissement : **un exemple de récurrence d'ordre 2** :

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_1 &= 3 \\ u_{n+2} &= 4u_{n+1} - 3u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \rightarrow \text{Montrer que : } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n$$

indication : pour l'hérédité montrer que : $P(n)$ vraie et $P(n+1)$ vraie $\implies P(n+2)$ vraie

5. pour justifier l'expression de la **dérivée n -ième d'une fonction**

Soit f définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

On admet que f est infiniment dérivable sur D . → Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

notations : $f^{(n)}$ désigne la dérivée n -ième de la fonction f .

$n! = \prod_{k=1}^{k=n} k$ est le produit des entiers de 1 à n . ($n!$ se lit "factorielle n ")

6. pour justifier **une divisibilité**

(a) Montrer que $4^n - 1$ est divisible par 3, pour tout entier n .

(b) Montrer que $n^3 - n$ est divisible par 3, pour tout entier n .

(c) Montrer que $7 \times 3^{5n} + 4$ est divisible par 11, pour tout entier n .
