1. pour montrer qu'une suite est minorée, majorée, bornée

   (a) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$ $\longrightarrow$ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant u_n \leqslant 2$

   (b) $\begin{cases} x_0 = -1 \\ x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 4} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$ $\longrightarrow$ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant x_n \leqslant 4$

   (c) $\begin{cases} t_0 = -8 \\ t_{n+1} = -\dfrac{1}{2}t_n^2 + 4 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$ $\longrightarrow$ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n \leqslant -4$

   (d) $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = v_n \mathrm{e}^{-v_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$ $\longrightarrow$ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \in [0;1]$

   (e) $\begin{cases} w_0 = 4 \\ w_{n+1} = \dfrac{3w_n + 2}{w_n + 2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$ $\longrightarrow$ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n \geqslant 2$ ***

2. pour établir le sens de variation d'une suite

   (a) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{4 + u_n^2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$ $\longrightarrow$ Montrer que $(u_n)$ est strict. croissante

   (b) $\begin{cases} v_0 = 0,9 \\ v_{n+1} = v_n - 0,1v_n^2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$ $\longrightarrow$ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 1$ ***

3. pour établir une inégalité

   (a) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{3}n + 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$ $\longrightarrow$ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant n + 3$

   (b) $\longrightarrow$ Montrer que : $\forall n \geqslant 2, \quad 5^n \geqslant 4^n + 3^n \qquad (n \in \mathbb{N})$

   (c) $\longrightarrow$ Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+x)^n \geqslant 1 + nx$

   (d) $\longrightarrow$ Montrer que : $\forall n \geqslant 6, \quad 6n + 7 \geqslant 2^n \qquad (n \in \mathbb{N})$

---

*** l'étude des variations de la fonction $f$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ peut-être utile (si $f$ croissante)

4. pour établir la formule explicite d'une suite

(a) $\begin{cases} u_0 & = & 5000 \\ u_{n+1} & = & 1,04u_n + 1000 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

→ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 30000 \times 1,04^n - 25000$

(b) $\begin{cases} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n}{1+u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$ → Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{2}{2n+1}$

(c) $\begin{cases} u_1 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{u_n^2+1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

→ Conjecturer la formule explicite de $u_n$, puis la justifier.

(d) Approfondissement : **un exemple de récurrence d'ordre 2** :

$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_1 & = & 3 \\ u_{n+2} & = & 4u_{n+1} - 3u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$ → Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 3^n$

*indication* : pour l'hérédité montrer que : $\mathrm{P}(n)$ vraie et $\mathrm{P}(n+1)$ vraie $\Rightarrow$ $\mathrm{P}(n+2)$ vraie

5. pour justifier l'expression de la dérivée $n$-ième d'une fonction

Soit $f$ définie sur $\mathrm{D} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

On admet que $f$ est infiniment dérivable sur D. → Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

*notations* : $f^{(n)}$ désigne la dérivée $n$-ième de la fonction $f$.

$n! = \prod_{k=1}^{k=n} k$ est le produit des entiers de 1 à $n$. ($n!$ se lit "factorielle $n$")

6. pour justifier une divisibilité

(a) Montrer que $4^n - 1$ est divisible par 3, pour tout entier $n$.

(b) Montrer que $n^3 - n$ est divisible par 3, pour tout entier $n$.

(c) Montrer que $7 \times 3^{5n} + 4$ est divisible par 11, pour tout entier $n$.