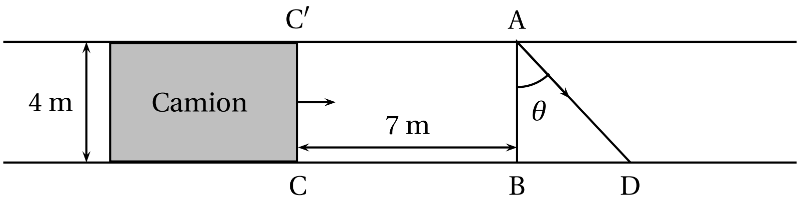
EXERCICE DE BAC - NOUVELLE CALÉDONIE 2005

Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km/h. Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui. Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite au maximum de ses possibilités, c'est à dire à … 30 km/h !

L'avant du camion est représenté par le segment $[CC']$ sur le schéma ci-dessous.
Le lapin part du point A en direction de D.

Cette direction est repérée par l'angle $\theta = \widehat{BAD}$ avec $0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}$ (en radians).



1. On pose $f(\theta) = \dfrac{7}{2} + 2\tan\theta - \dfrac{4}{\cos\theta}$.

   Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta) > 0$.

2. Entreprendre une étude appropriée de la fonction f de façon à pouvoir conseiller au mieux le lapin.

---

1. On a dans le triangle rectangle ABD, $AD\cos\theta = AB = 4 \iff AD = \dfrac{4}{\cos\theta}$ puisque $\theta < \dfrac{\pi}{2}$.

   De même $\tan\theta = \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{BD}{4} \iff BD = 4\tan\theta$.

   $t_1 = \dfrac{\dfrac{0,004}{\cos\theta}}{30}$.

   $t_2 = \dfrac{0,007 + 0,004\tan\theta}{60}$.

   Le lapin aura pu traverser sans encombre si $t_1 < t_2$

   $t_1 < t_2 \iff \dfrac{\dfrac{0,004}{\cos\theta}}{30} < \dfrac{0,007+0,004\tan\theta}{60} \iff \dfrac{0,008}{\cos\theta} < 0,007 + 0,004\tan\theta \iff \ldots$
   $8 < 7\cos\theta + 4\sin\theta \iff \dfrac{7}{2}\cos\theta + 2\sin\theta - 4 > 0 \iff \ldots$
   $\dfrac{7}{2} + 2\tan\theta - \dfrac{4}{\cos\theta} > 0 \iff f(\theta) > 0$.

2. Étudions les variations de la fonction : $f'(\theta) = \dfrac{2}{\cos^2\theta} - \dfrac{4\sin\theta}{\cos^2\theta}$ qui est du signe de $2 - 4\sin\theta$.

Or $\;2-4\sin\theta=0 \iff \sin\theta=\dfrac{1}{2} \iff \theta=\dfrac{\pi}{6}$.

La fonction f est donc croissante sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{6}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{6}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Or $f(0)=\dfrac{7}{2}-4=-\dfrac{1}{2}<0$;

$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{7}{2}+2\dfrac{\sqrt{3}}{3}-2\times\dfrac{4}{\sqrt{3}}=\dfrac{7}{2}-\dfrac{6\sqrt{3}}{3}\approx 0{,}033\,59>0$.

En écrivant $f(\theta)$ sous la forme $f(\theta)=\dfrac{7}{2}+\dfrac{2\sin\theta-4}{\cos\theta}$, on voit que

$\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} f(\theta)=-\infty$.

Comme le suggère le graphe, la fonction est positive si $0,4\leqslant\theta\leqslant 0,64$ (environ) soit si l'angle mesure entre 23 et 37 degrés environ.