Corrigé du TD multiniveaux sur intégration

Niveau 1

131 **a.** $d(x) = f(x) - g(x) = -x^2 + 3x = x(-x + 3)$.

$d(x) \geq 0$ pour $x \in [0 ; 3]$. Donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $[0 ; 3]$, et en dessous de $\mathscr{C}_g$ sur $]-\infty ; 0]$ et sur $[3 ; +\infty[$.

b. Aire $= \int_0^3 \left(f(x) - g(x)\right) \mathrm{d}x = \frac{9}{2}$ u.a.

113 **a.** $I + J = \ln(5)$ et $I - 2J = \ln\left(\frac{11}{7}\right)$.

b. On résout un système et on obtient pour valeurs :

$I = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{11}{7}\right) + \frac{2}{3}\ln(5)$ et $J = -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{11}{7}\right) - \frac{1}{3}\ln(5)$.

135 **1.** $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $]-1 ; +\infty[$.

2.a. $f(x) - g(x) = \frac{x^2+7}{x+1} - x + 1 = \frac{8}{x+1}$

b. $f(x) - g(x) \geq 0$ pour $x > -1$. La conjecture est donc validée.

Lorsque x tend vers $+\infty$, $f(x) - g(x)$ tend vers 0 donc lorsque x devient de plus en plus grand, l'écart entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ devient de plus en plus petit.

3. a. I_λ est l'aire en u.a. du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $[0 ; \lambda]$.

b. $I_\lambda = 8\ln(\lambda + 1)$

c. I_λ tend vers $+\infty$ lorsque λ tend vers $+\infty$. L'aire du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ devient de plus en plus grand et tend vers $+\infty$.

Niveau 2

49 Marie calcule d'abord $I_1 = \ln(2)$ et $I_4 = \frac{e^2 - 1}{2}$.

$I_2 = 3I_1 - I_4 = 3\ln(2) - \frac{e^2-1}{2}$;

$I_3 = I_1 - 4I_4 = \ln(2) - 2e^2 + 2$

$I_5 = 7I_4 = \frac{7(e^2-1)}{2}$; $I_6 = 4I_1 = 4\ln(2)$.

48 **a.** $\varphi(0) = 0$

b. c. D'après le cours, comme la fonction $x \mapsto \ln(1 + t^2)$ est continue positive sur $[0 ; +\infty[$ alors φ est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et $\varphi'(x) = \ln(1 + x^2)$.

d. $\varphi'(x) \geq 0$ sur $[0 ; +\infty[$ donc φ est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

91 **a.** $\frac{x^2 - x + 2}{(x-1)^2} = 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2}$

b. $I = \ln(3) + \frac{10}{3}$

Niveau 3

151 Pour tout nombre réel x, $\cos(x) \geq 1$ donc $1 - \cos(x) \geq 0$, on en déduit que $g(x) \geq f(x)$ pour tout nombre réel x.
On cherche les abscisses des points A et B, points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
Leurs abscisses sont solutions de l'équation $f(x) = g(x)$:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 1 - \cos(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos(x) = 1 \Leftrightarrow x = k \times 2\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ dans $[0 ; 15]$ sont 0, 2π et 4π. Ainsi $x_A = 2\pi$ et $x_B = 4\pi$.
Comme $g(x) \geq f(x)$:

• $\text{Aire(verte)} = \int_0^{2\pi}\big(g(x) - f(x)\big)\mathrm{d}x$
$= \int_0^{2\pi}(1 - \cos(x))\mathrm{d}x$
$= [x - \sin(x)]_0^{2\pi} = 2\pi.$

• $\text{Aire(orange)} = \int_{2\pi}^{4\pi}\big(g(x) - f(x)\big)\mathrm{d}x$
$= \int_{2\pi}^{4\pi}(1 - \cos(x))\mathrm{d}x$
$= [x - \sin(x)]_{2\pi}^{4\pi} = 2\pi.$

Les deux aires sont donc égales.

153 Pour tout entier naturel n non nul, et pour tout nombre réel x, $\frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} \geq 0$ donc $u_n \geq 0$.

Or $u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx} + e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$
$= \int_0^1 \frac{e^{-nx}(1+e^{-x})}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$
$= \int_0^1 e^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1-e^{-n}}{n}.$

Donc $u_n - \frac{1-e^{-n}}{n} = -u_{n+1} \leq 0$.

On en conclut que $0 \leq u_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$.

Or $\frac{1-e^{-n}}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{ne^n}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-n}}{n} = 0$.

D'après le théorème des gendarmes, on en conclut que (u_n) est convergente de limite égale à 0.

154 f désigne une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3 donc on peut écrire f de la forme $f(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$ où p, q, r et s sont des nombres réels.

D'une part : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{px^4}{4} + \frac{qx^3}{3} + \frac{rx^2}{2} + sx\right]_a^b = \frac{p(b^4-a^4)}{4} + \frac{q(b^3-a^3)}{3} + \frac{r(b^2-a^2)}{2} + s(b-a).$

D'autre part : $\frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$

$$= \frac{b-a}{6}\left[pa^3 + qa^2 + ra + s + 4\left(p\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + q\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + r\frac{a+b}{2} + s\right) + pb^3 + qb^2 + rb + s\right]$$
$$= \frac{p(b^4-a^4)}{4} + \frac{q(b^3-a^3)}{3} + \frac{r(b^2-a^2)}{2} + s(b-a).$$

Donc $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$.